ЛЕКЦИЯ 3
ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических элементов (прямых и плоскостей), называются позиционными. Обычно в этих задачах определяется взаимная принадлежность элементов или строится линия (точка) взаимного пересечения.

Задачи на взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей решаются на основании геометрических признаков: параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей, принадлежности прямой и плоскости, перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности двух плоскостей.

4.1. Параллельность прямой и плоскости

Прямая, не лежащая в плоскости, может быть параллельна плоскости или пересекаться с ней.

При решении вопроса о параллельности прямой и плоскости опираются на известное положение: прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости.

Через точку можно провести множество прямых, параллельных плоскости. Для получения единственного решения накладывают дополнительные условия.

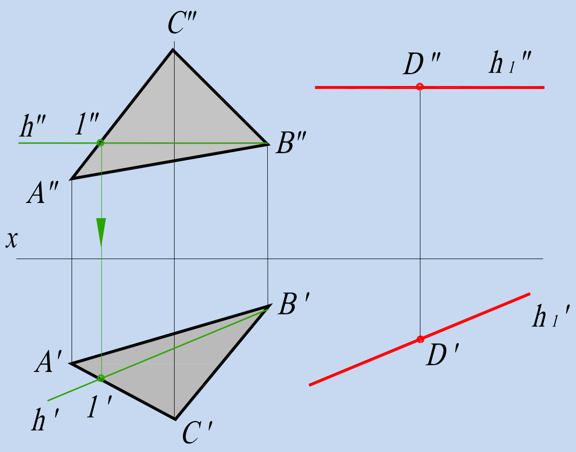


Рис. 4.1

Пример 1: Через точку D провести горизонтальную прямую, параллельную плоскости треугольника ABC (рис.4.1)

Построение следует начинать с построения в плоскости треугольника ABC произвольной горизонтали h. Для сокращения построений горизонталь h ($B1$) проводим через вершину B. Затем через точку D проводим прямую h_1, параллельную h.

При определении параллельности прямой и плоскости выявляем наличие в плоскости прямой, параллельной заданной.

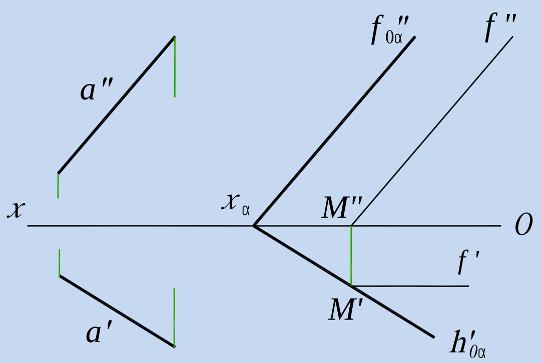


Рис. 4.2

Пример 2: Определить, параллельна ли прямая a плоскости α (рис. 4.2).

В плоскости α, заданной следами, проводим проекцию прямой, параллельную соответствующей проекции заданной прямой a. Такой является проекция $f''\|a''$. Так как f'' параллельна $f_{0\alpha}''$, то горизонтальная проекция f' параллельна оси x. Так как $f' \nparallel a'$, то делаем вывод: прямая a не параллельна плоскости α.

4.2. Параллельность двух плоскостей

Две плоскости параллельны в том случае, если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Так, на рис.4.3 плоскость треугольника *ABC* параллельна плоскости двух пересекающихся прямых *a* и *b*, проходящих через точку *D*, так как две стороны *AB* и *AC* соответственно параллельны прямым *a* и *b*.

Как следствие из этого определения вытекает: у параллельных плоскостей одноименные следы параллельны (рис. 4.4)

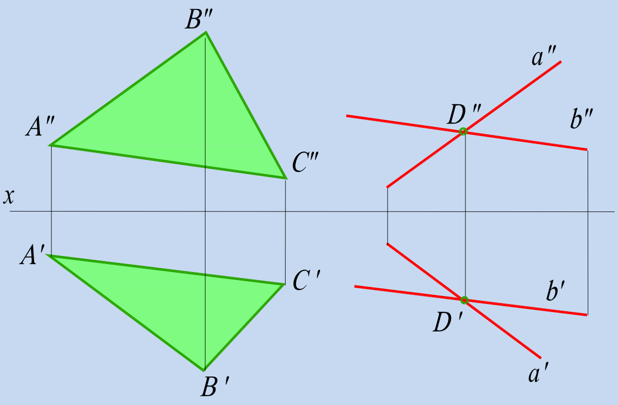


Рис. 4.3

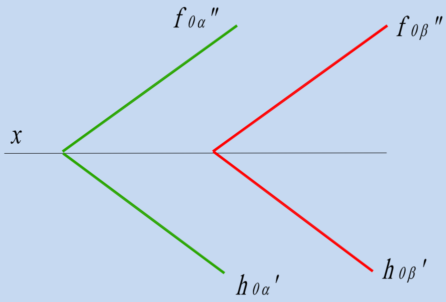


Рис. 4.4

Пример. Через точку *A* провести плоскость, параллельную плоскости параллельных прямых *m* и *l* (рис. 4.5).

Через точку *A* проводим прямую *k*, параллельную прямым *l* и *m*, задающим плоскость. Для того чтобы получить вторую прямую, проводим в плоскости произвольную вспомогательную прямую 1–2. Затем проводим через точку *A* прямую *n*, параллельную прямой 1–2. Прямые *k* и *n* образуют пересекающие прямые, которые параллельны двум пересекающимся прямым заданной плоскости.

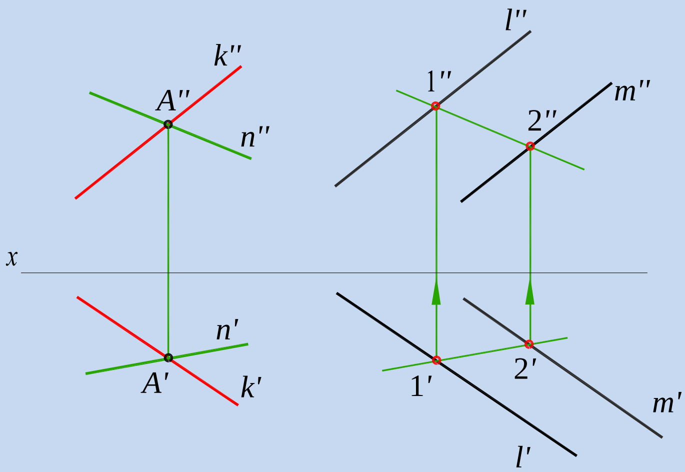
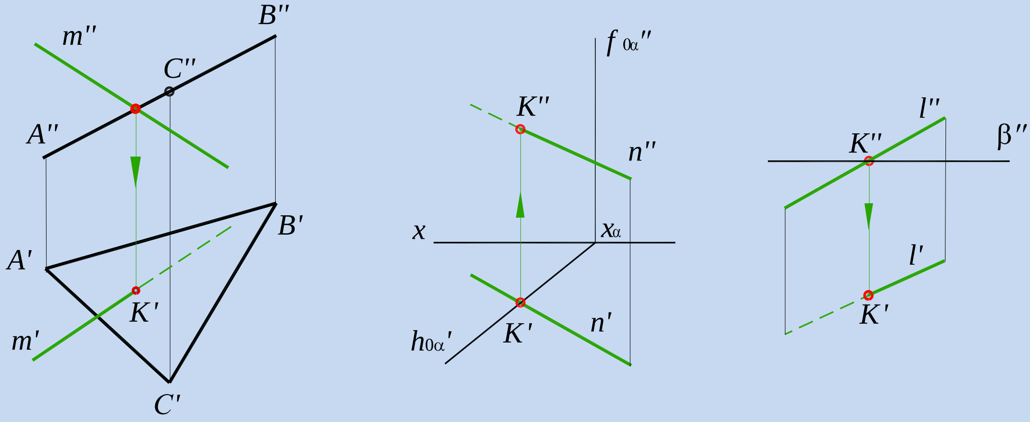


Рис. 4.5

4.3. Пересечение прямой линии с плоскостью частного положения

Так как плоскости частного положения проецируются на перпендикулярную к ней плоскость проекций в виде прямой линии (следа-проекции), то на этой прямой должна находиться соответствующая проекция точки пересечения прямой с проецирующей плоскостью.

Примеры определения точек пересечения прямой с плоскостью частного положения даны на рис. 4.6.



а *б* *в*

Рис. 4.6

На рис. 4.6, *а* прямая *m* общего положения пересекается с фронтально-проецирующей плоскостью, заданной треугольником *ABC*. Фронтальная проекция *K''* точки пересечения находится в точке пересечения фронтальной проекции *m''* прямой со «следом-проекцией» *A''B''C''*. Горизонтальная проекция *K'* построена при помощи линий связи.

На рис. 4.6, *б* показано построение точки пересечения прямой *n* общего положения с горизонтально-проецирующей плоскостью α, заданной следами. На этот раз сначала отмечается горизонтальная проекция *K'* точки пересечения горизонтальной проекции *n'* прямой со следом-проекцией α*'* плоскости. Фронтальная проекция *K''* находится при помощи линии связи.

На рис.4.6, *в* прямая *l* общего положения пересекается с горизонтальной плоскостью β, заданной следом-проекций β*''*. В этом случае фронтальная проекция *K''* точки пересечения определена в пересечении фронтальной проекции *l''* прямой со следом-проекций β*''*. Горизонтальная проекция *K''* построена при помощи линии связи.

Во всех случаях плоскость считается «непрозрачной»: та часть прямой, которая закрывается плоскостью, показывается штриховой линией. Часть прямой, расположенная под плоскостью или за плоскостью, очевидна из чертежей.

4.4. Пересечение двух плоскостей

Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям, либо одну точку и направление линии пересечения плоскостей.

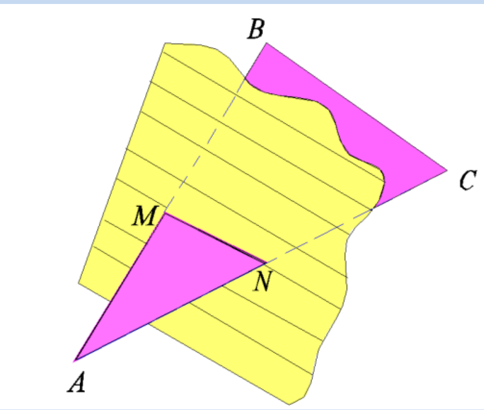


Рис. 4.7

Из рис. 4.7 видно, что прямая *MN*, по которой пересекаются между собой две плоскости, проходит через точки *M* и *N*, в которых прямые *AB* и *AC* плоскости треугольника пересекают вторую плоскость, т. е. точки *M* и *N* принадлежат обеим плоскостям.

Для нахождения точек пересечения обычно приходится выполнять определенные построения. Но если хотя бы одна из пересекающихся плоскостей перпендикулярна к плоскости проекций, то построение проекций линии пересечения упрощается.

На рис. 4.8 приведено построение линии пересечения плоскости общего положения, заданной треугольником *ABC* и фронтально-проецирующей плоскости треугольника *DEF*.

Общими точками для этих двух плоскостей будут точки пересечения K_1 и K_2 сторон AB и AC треугольника ABC с «вырожденной» проекцией треугольника DEF. Фронтальная проекция K_1'' K_2'' линии пересечения совпадает со «следом-проекцией» $D''E''F''$ треугольника DEF. Горизонтальные проекции K_1' и K_2' построим при помощи линий связи.

При рассмотрении фронтальных проекций пересекающихся треугольников заметно, что часть K_1'' $K_2''C''B''$ треугольника ABC расположена над следом-проекцией $D''E''F''$ и на горизонтальной проекции будет видна («накрывает» плоскость треугольника DEF). Часть K_1'' и K_2'' A'' располагается под $D''E''F''$ и «накрывается» плоскостью треугольника DEF.

На рис. 4.9 плоскость общего положения, заданная треугольником ABC пересекается горизонтально-проецирующей плоскостью α, заданной следами.

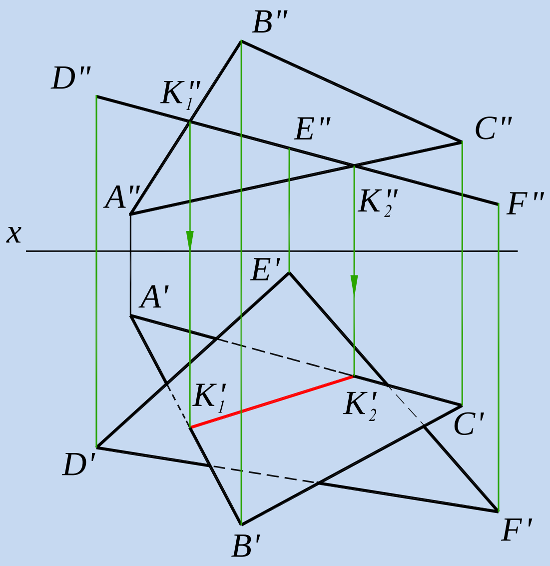


Рис. 4.8

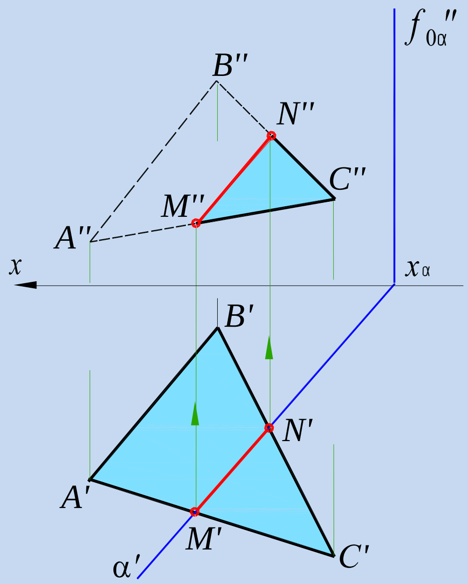
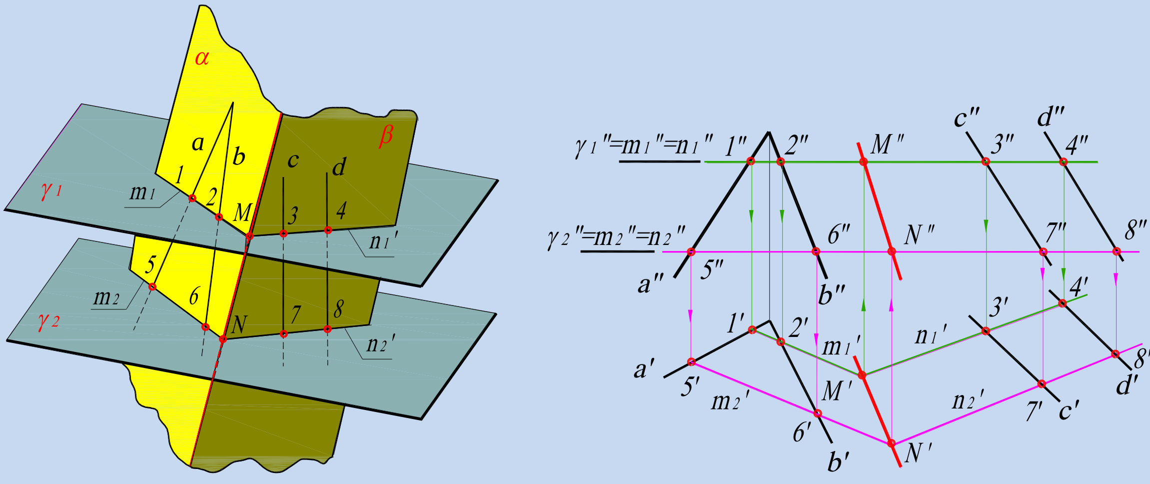


Рис. 4.9

Горизонтальная проекция $M'N'$ линии пересечения совпадает со «следом-проекцией» α', а фронтальная $M''N''$ определяется с помощью линий связи.

Часть $MNAB$ треугольника ABC, расположенная за плоскостью α, невидима и изображена штриховыми линиями.

Рассмотрим общий случай построения линии пересечения двух плоскостей. Пусть в пространстве (рис.4.10, *а*) заданы две плоскости общего положения α и β, плоскость α – двумя пересекающимися прямыми a и b, плоскость β – двумя параллельными прямыми c и d. Для построения линии их пересечения необходимо, как отмечалось выше, найти две точки, общие обеим плоскостям. Для определения этих точек заданные плоскости пересекают двумя вспомогательными плоскостями (посредниками). В качестве таких плоскостей целесообразно использовать плоскости частного положения (проецирующие или уровня). В данном случае использованы горизонтальные плоскости γ_1 и γ_2. Плоскость γ_1 пересекает плоскости α и β по горизонталям 1–2 и 3–4 соответственно. Эти горизонтали, пересекаясь, определяют точку M, общую для плоскостей α и β. Вторая вспомогательная плоскость γ_2 пересекает заданные плоскости по горизонталям 5–6 и 7–8, которые, пересекаясь, определяют вторую общую точку N. Прямая MN – искомая линия пересечения плоскостей α и β.



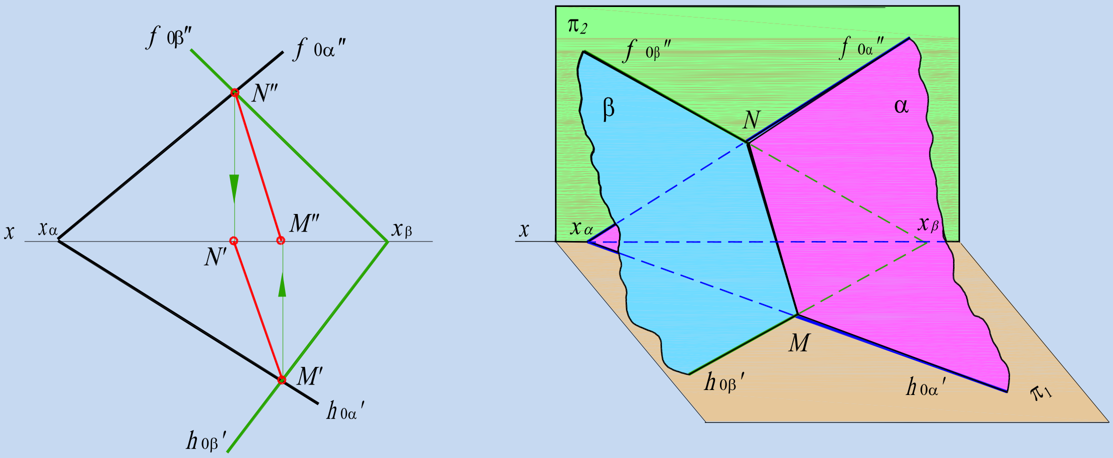
а б

Рис. 4.10

На рис.4.10, *б* описанный метод применен для проекционного решения рассмотренной выше задачи.

Если плоскости заданы следами, то две точки, общие для двух плоскостей, определяются в пересечении одноименных следов этих плоскостей.

На рис.4.11, *а* представлено построение линии пересечения плоскостей α и β общего положения. Горизонтальная проекция M' одной общей точки M находится в пересечении горизонтальных следов плоскостей, а фронтальная N'' другой общей точки N – в пересечении фронтальных следов. Недостающие проекции M'' и N' точек M и N определяются на оси x при помощи линии связи. Соединив одноименные проекции точек M и N, построим проекции линии пересечения MN заданных плоскостей.



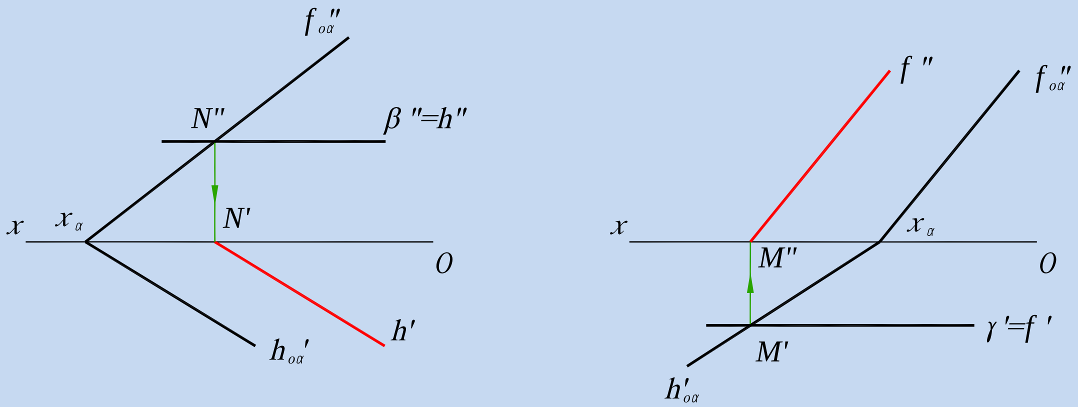
а б

Рис. 4.11

На рис. 4.11, *б* дано наглядное изображение представленной выше задачи.

Линия пересечения двух плоскостей, заданных следами, может быть определена и одной точкой, если известно ее направление.

На рис.4.12, *а* плоскость общего положения α, пересекается с горизонтальной плоскостью β (β″). Линия пересечения этих плоскостей – горизонталь. Ее фронтальная проекция h'' совпадает с фронтальным следом-проекцией β″, а горизонтальная h' параллельна горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости α. Проекции линии пересечения проходят через общую точку N (N', N'') для обеих плоскостей.



а *б*

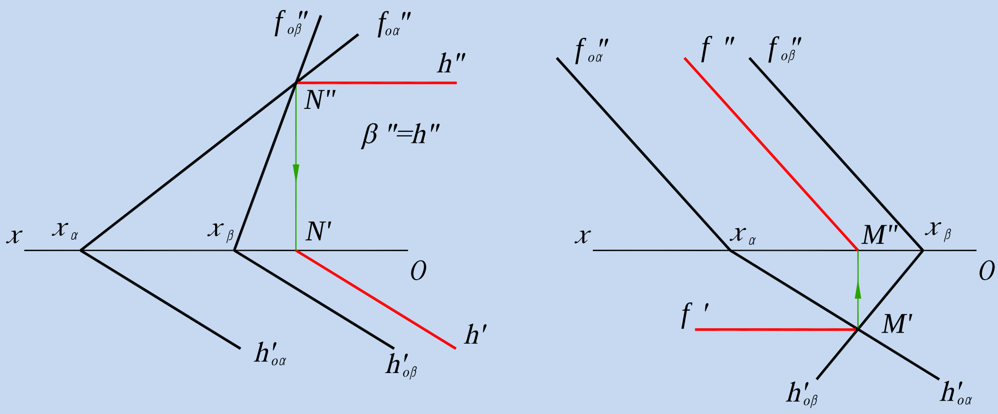
Рис. 4.12

На рис. 4.12, *б* плоскость общего положения α пересекается с фронтальной плоскостью γ (γ'). Линия пересечения этих плоскостей – фронталь *f*. Ее горизонтальная проекция *f'* совпадает с горизонтальным следом-проекцией γ', а фронтальная *f''* параллельна фронтальному следу f''_{0x} плоскости α. Проекции линии пересечения проходят через общую точку *M* (*M'*, *M''*) для обеих плоскостей.

При пересечении плоскостей общего положения с параллельными следами линией пересечения является прямая уровня, проходящая через точку пересечения непараллельных следов.

На рис.4.13, *а* даны плоскости общего положения α и β с параллельными горизонтальными следами. Линия пересечения этих плоскостей – горизонталь *h* (*h'*, *h''*), проходящая через общую точку *N* (*N'*, *N''*) и параллельная горизонтальным следам плоскостей.

На рис. 4.13, *б* плоскости общего положения α и β пересекаются с параллельными фронтальными следами по фронтали *f* (*f'*, *f''*), проходящей через общую точку *M* (*M'*, *M''*) и параллельной фронтальным следам плоскостей.



а *б*

Рис. 4.13

Чтобы определить линию пересечения плоскостей, заданных следами, когда пересечение горизонтальных или фронтальных (или и тех, и других) следов этих плоскостей недоступно в пределах чертежа, приходится находить промежуточные точки линии пересечения. Для этого вводятся вспомогательные плоскости (обычно плоскости уровня как дающие наиболее простое построение линии пересечения с обеими заданными плоскостями).

На рис. 4.14 даны две плоскости α и β общего положения. Горизонтальные следы этих плоскостей пересекаются в точке M (M', M''). Так как точка пересечения фронтальных следов недоступна, то для определения промежуточной точки A (A', A'') линии пересечения вводится вспомогательная горизонтальная плоскость γ (γ′). Она пересекается с плоскостями α и β по горизонталям h_1 и h_2, имеющим общую точку A. Линия MA ($M'A'$, $M''A''$) – искомая линия пересечения плоскостей α и β.

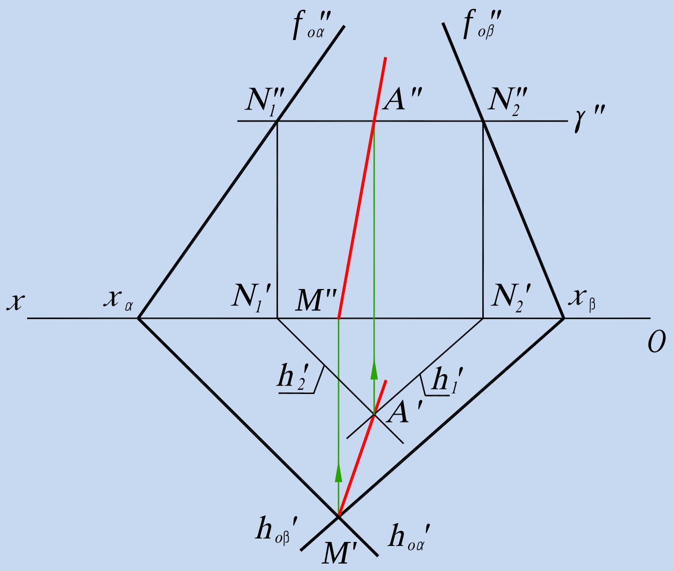


Рис. 4.14

4.5. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

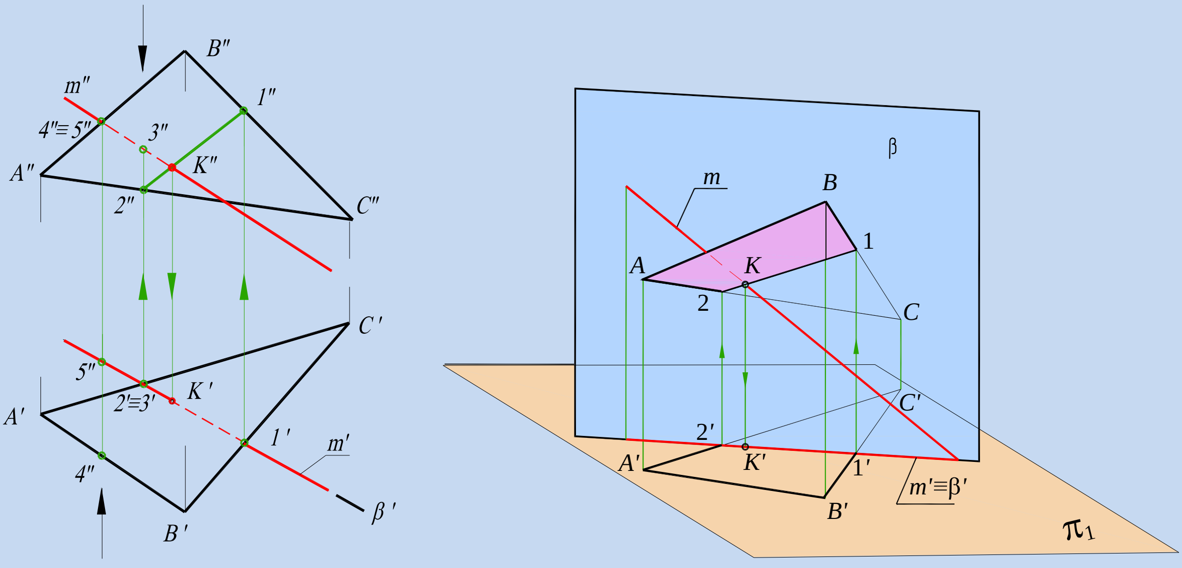
Для определения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения следует выполнить следующие этапы:

- через прямую проводят вспомогательную плоскость (чаще всего проецирующую или уровня);
- определяют линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной;
- находят точку пересечения заданной прямой и построенной;
- определяют видимые части проекций данной прямой (плоскость считается непрозрачной).

На рис. 4.15, *а* приведено построение точки пересечения прямой m (m', m'') общего положения с плоскостью общего положения, заданной треугольником ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$).

Через прямую m проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость β (β′). По горизонтальным проекциям 1′ и 2′ точек 1 и 2 находим фронтальные 1″ и 2″, соединяя которые получаем фронтальную проекцию линии пересечения 1″2″. Проекция 1″2″ пересекает фронтальную проекцию m'' в точке K'', с помощью линии связи определяем горизонтальную проекцию K' точки K. Видимость прямой и плоскости на горизонтальной плоскости проекций определяется с помощью горизонтально-конкурирующих точек 2 и 3. Точка 2 лежит на стороне AC, а 3 – на прямой m. Их фронтальные проекции 2″ и 3″ показывают, что точка 2 находится ниже точки 3, и поэтому на горизонтальной плоскости проекций горизонтальная проекция 2′ точки 2 будет закрыта проекцией 3′ точки 3.

Отсюда следует, что проекция $A'C'$ стороны AC расположена ниже проекции m' и участок этой прямой с левой стороны до K' будет видимым.



а б

Рис. 4.15

Относительную видимость на фронтальной плоскости проекций можно определить с помощью фронтально-конкурирующих точек 4 и 5. Как показывают горизонтальные проекции 4′ и 5′ этих точек точка 4 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 5, но поскольку последняя принадлежит прямой *m*, то участок ее фронтальной проекции *K*″5″ невидим.

На рис.4.15, *б* дано наглядное изображение приведенной выше задачи.

На рис. 4.16 дан пример построения точки пересечения прямой *AB* общего положения с плоскостью общего положения α, заданной следами.

В данном случае через прямую *AB* проведена фронтально-проецирующая плоскость β. На фронтальной плоскости проекций линия пересечения плоскостей *MN* совпадает с горизонтальным следом-проекцией β′ этой плоскости. Построив горизонтальную проекцию прямой *M′N′*, находим горизонтальную проекцию точки пересечения ее с прямой *AB* – точку *K*′, после чего по линии связи находим фронтальную проекцию *K*″ точки *K*. В завершении определяем видимость участков проекций прямой *AB*.

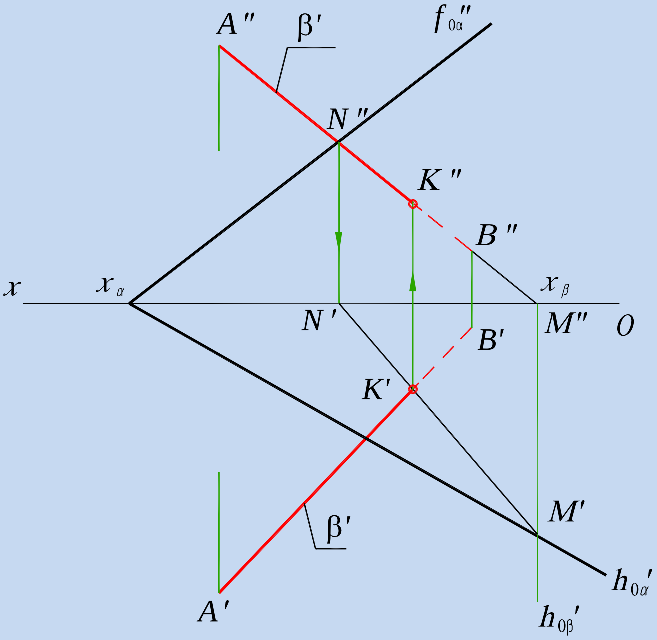


Рис. 4.16

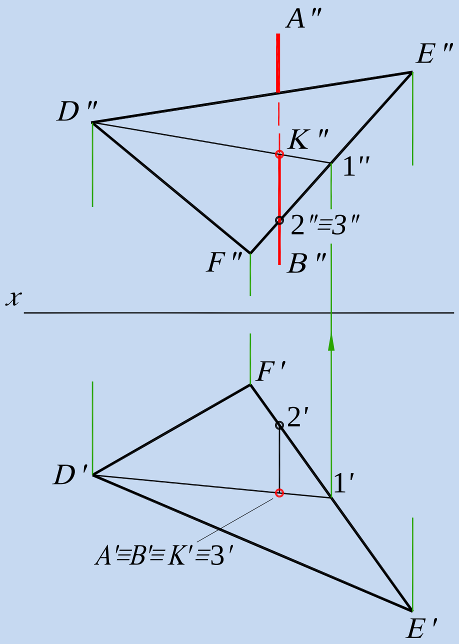


Рис. 4.17

На рис. 4.17 изображена горизонтально-проецирующая прямая *AB*, пересекающаяся с плоскостью общего положения, заданной треугольником *DEF*. Положение горизонтальной проекции *K′* точки пересечения *K* известно (*K′*=*A′*=*B′*), а положение фронтальной проекции определено при помощи прямой *D*1 треугольника *DEF*. Видимость фронтальной проекции прямой *AB* определим, рассматривая горизонтальные проекции 2′ и 3′ конкурирующих точек 2 и 3, принадлежащих EF и AB соответственно.

4.6. Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к любой прямой, проведенной в этой плоскости. Но прямой угол между перпендикуляром и прямой проецируется на плоскость в виде прямой лишь в том случае, если прямая параллельна плоскости. Поэтому, чтобы построить проекции перпендикуляра, используют лежащие в плоскости две прямые линии, параллельные плоскостям проекций.

Итак, у перпендикуляра к плоскости его горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали, профильная проекция перпендикулярна к профильной проекции профильной прямой этой плоскости.

На рис. 4.18 показано построение проекций перпендикуляра, проведенного через точку *D* перпендикулярно плоскости треугольника *ABC*. Направление проекций перпендикуляра определяется горизонталью *h* (*C*1) и фронталью *f* (*C*2) плоскости треугольника.

Так, горизонтальная проекция *n′* перпендикуляра проведена под прямым углом к проекции *C′*1′ горизонтали, а фронтальная проекция *n″* расположена под прямым углом к фронтальной проекции *C″*2″ фронтали.

Очевидно, когда плоскость задана следами, то проекции перпендикуляра перпендикулярны одноименным следам плоскости.

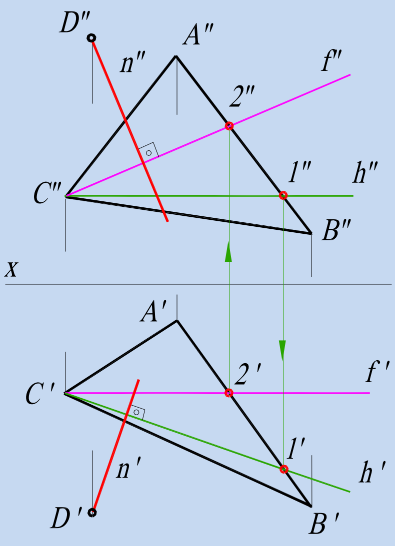


Рис. 4.18

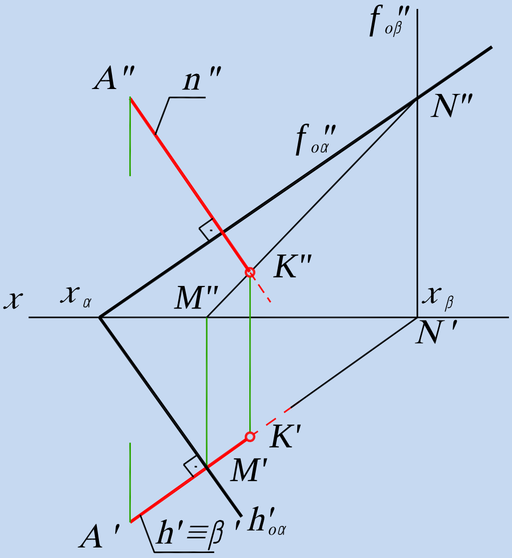


Рис. 4.19

На рис. 4.19 рассмотрен пример построения перпендикуляра, проведенного через точку *A*, к плоскости α, заданной следами, и показано построение точки *K*, в которой перпендикуляр пересекает плоскость α.

Горизонтальная проекция *n*′ перпендикуляра проходит под прямым углом к горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости, а фронтальная – перпендикулярна фронтальному следу $f''_{0\alpha}$.

Точка *K* пересечения перпендикуляра *n* с плоскостью определена с помощью горизонтально-проецирующей плоскости β, проведенной через перпендикуляр. *MN* – линия пересечения заданной плоскости α и вспомогательной плоскости β.

При построении плоскости, перпендикулярной прямой, руководствуемся теми же положениями.

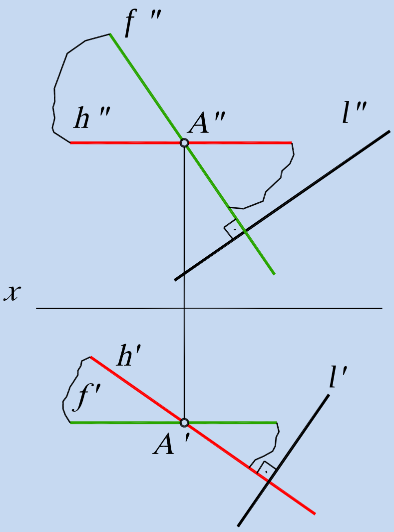
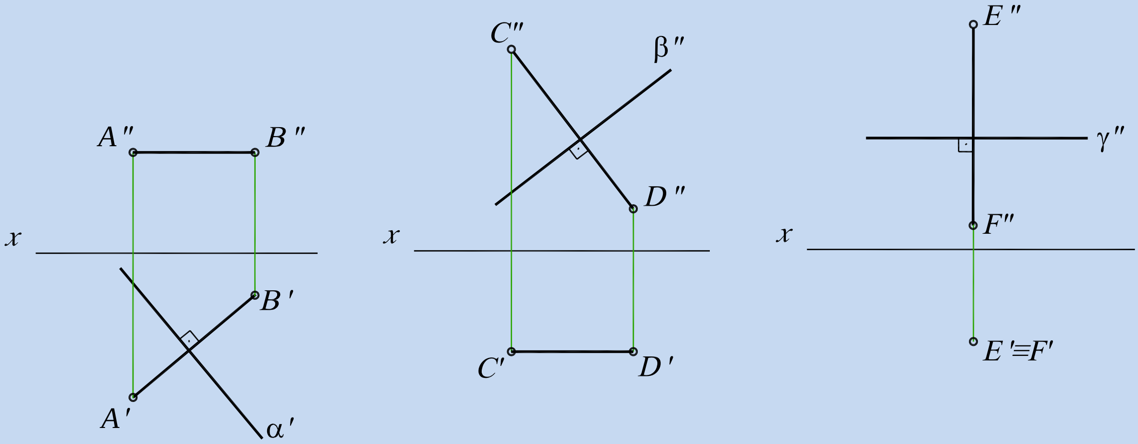


Рис. 4.20

Пусть требуется построить плоскость, проходящую через точку *A* и перпендикулярную данной прямой *l* (рис. 4.20).

Искомую плоскость задаем двумя пересекающимися прямыми (горизонталью *h* и фронталью *f*), проходящими через данную точки *A*. Горизонтальная проекция *h*′ горизонтали *h* перпендикулярна горизонтальной проекции *l*′ прямой *l*, фронтальная проекция *f*″ фронтали *f* перпендикулярна фронтальной проекции *l*″ прямой *l*.

Если плоскости занимают частное положение, то перпендикуляры к этим плоскостям располагаются параллельно плоскостям проекций. Так, перпендикуляром к горизонтально-проецирующей плоскости α (α′) является горизонталь *AB* (рис. 4.21, *а*). Фронтальная прямая *CD* перпендикулярна фронтально-проецирующей плоскости β (β″) (рис. 4.21, *б*). Горизонтально-проецирующая прямая *EF* является перпендикуляром горизонтальной плоскости γ (γ′) (рис. 4.21, *в*).



а *б* *в*

Рис. 4.21

4.7. Перпендикулярность двух прямых

Взаимно перпендикулярные прямые общего положения образуют прямой угол, который проецируется на плоскости проекций с искажением. Через точку можно провести бесконечное множество прямых, перпендикулярных данной, но только одна из них будет пересекать другую под прямым углом. Все эти прямые принадлежат одной плоскости, перпендикулярной данной прямой.

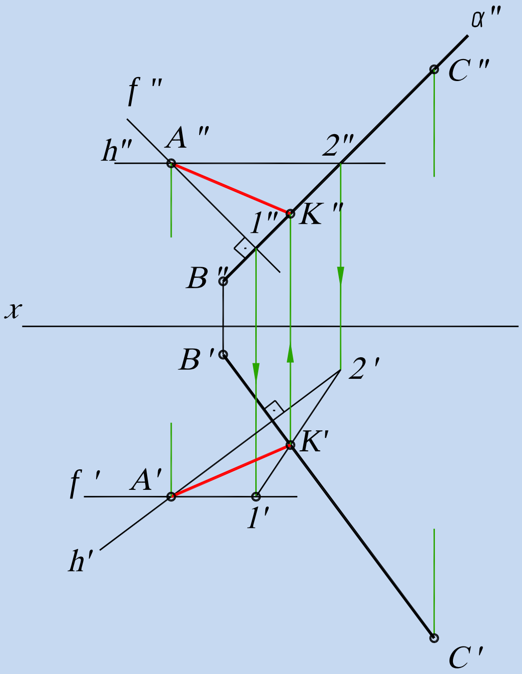
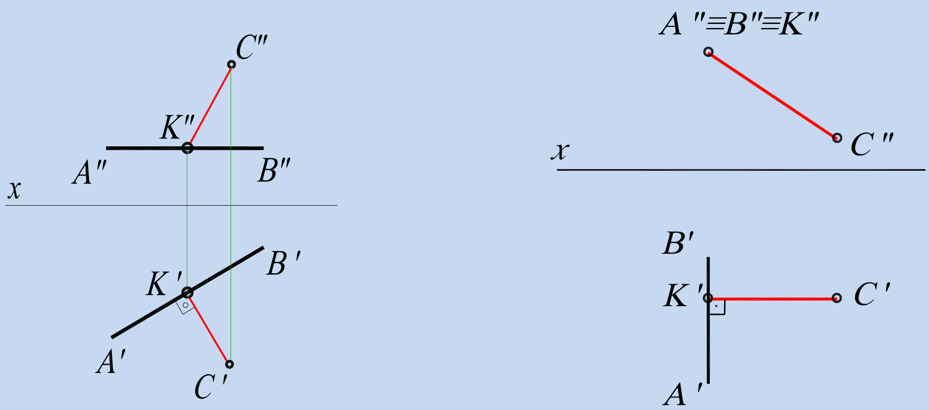


Рис. 4.22

Так, на рис. 4.22 показано построение прямой, проходящей через точку *A* и пересекающей прямую *BC* под прямым углом. Вначале через точку *A* проводим плоскость, перпендикулярную к прямой *BC*. Эта плоскость задается двумя пересекающимися прямыми: горизонталью *h* и фронталью *f* (при этом горизонтальная проекция *h′* горизонтали *h* перпендикулярна к горизонтальной проекции *B′C′* прямой *BC*, а фронтальная проекция фронтали *f″* перпендикулярна к фронтальной проекции *B″C″*). Затем определяем точку пересечения *K* прямой *BC* с проведенной плоскостью. Для этого через прямую *BC* проводим фронтально-проецирующую плоскость α (α″), которая пересекает плоскость, заданную горизонталью *h* и фронталью *f*, по линии 1–2 (1′–2′, 1″–2″). В пересечении прямой 1–2 с прямой *BC* получается точка *K*. Прямая *AK* является искомым перпендикуляром, так как пересекает прямую *BC* и находится в плоскости, перпендикулярной прямой *BC*.

При построении проекций перпендикуляра к прямым частного положения задача упрощается, так как одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекции и прямой угол на эту плоскость проекций проецируется без искажения.



а *б*

Рис. 4.23

Так на рис. 4.23, *а* показано построение проекций перпендикуляра, проведенного из точки C к горизонтали AB. Горизонтальная проекция $C'K'$ перпендикуляра CK располагается под прямым углом к горизонтальной проекции $A'B'$ прямой AB. Фронтальная проекция $C''K''$ определяется при помощи линий связи (точка K принадлежит прямой AB).

На рис. 4.23, *б* показано построение проекций перпендикуляра, проведенного из точки C к фронтально-проецирующей прямой AB. Построение фронтальной проекции $C''K''$ перпендикуляра очевидно из рисунка, а его горизонтальная проекция $C'K'$ перпендикулярна к горизонтальной проекции $A'B'$ прямой AB.

4.8. Перпендикулярность двух плоскостей

Известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

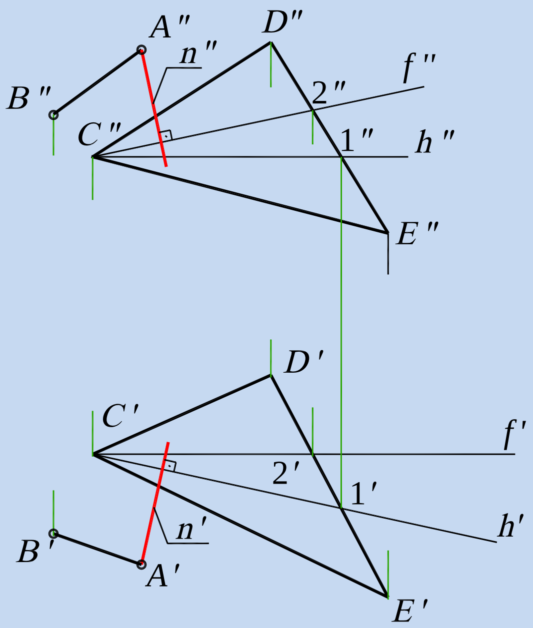


Рис. 4.24

Через данную точку A можно провести бесчисленное множество плоскостей, перпендикулярных к заданной плоскости α. Все эти плоскости проходят через перпендикуляр n, проведенный из точки A на плоскость α. Для получения единственного решения требуются дополнительные условия.

На рис. 4.24 показано построение плоскости, перпендикулярной к плоскости, заданной треугольником CDE. Дополнительным условием здесь служит то, что искомая плоскость должна проходить через прямую AB.

Следовательно, искомая плоскость определяется прямой AB и перпендикуляром к плоскости треугольника. Для проведения этого перпендикуляра в плоскости CDE взяты горизонталь h ($C1$) и фронталь f ($C2$). Через точку A прямой AB проведены проекции перпендикуляра n к плоскости CDE ($n'\perp C'1'$, $n''\perp C''2''$).

Образованная пересекающимися прямыми AB и n плоскость перпендикулярна к плоскости CDE, так как проходит через перпендикуляр к этой плоскости.

На рис. 4.25 приведено построение плоскости, проходящей через данную точку A и перпендикулярную двум данным плоскостям: плоскости треугольника BCD и плоскости α, заданной следами.

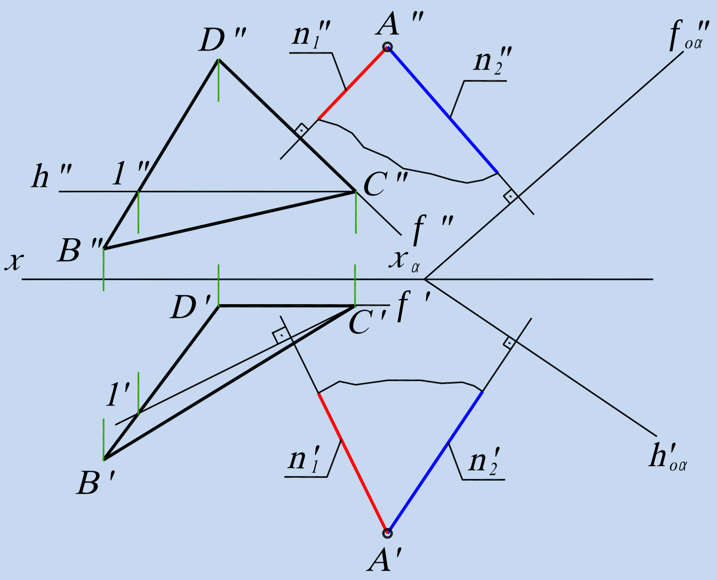


Рис. 4.25

Искомая плоскость задается двумя пересекающимися перпендикулярами n_1 и n_2, проходящими через точку A, каждый из которых перпендикулярен одной из заданных плоскостей. Горизонтальная проекция n_1' перпендикуляра n_1 расположена перпендикулярно горизонтальной проекции $C'1'$ горизонтали $C1$ плоскости треугольника BCD ($n_1' \perp C'1'$). Фронтальная проекция n_1'' этого перпендикуляра перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали $C''D''$ треугольника BCD. Проекции перпендикуляра n_2 соответственно перпендикулярны к одноименным следам плоскости ($n_2' \perp h'_{0\alpha}$, $n_2'' \perp f''_{0\alpha}$).

Если плоскости заданы следами, то у взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения их одноименные следы не перпендикулярны между собой.

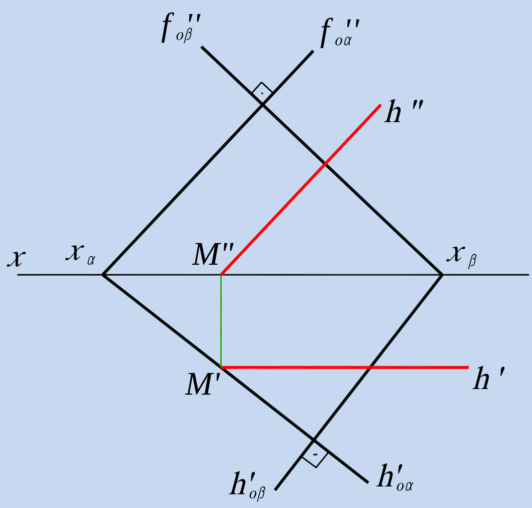


Рис. 4.26

Рассмотрим две плоскости α и β общего положения (рис. 4.26), у которых одноименные следы взаимно перпендикулярны.

Проведем в плоскости α одну из линий уровня, например, горизонталь h (h', h''). Поскольку h' не перпендикулярна к горизонтальному следу $h'_{0\beta}$ плоскости β, то указанное выше условие перпендикулярности двух плоскостей не соблюдается.

Если же одна из заданных плоскостей (или обе) являются плоскостями частного положения, то взаимная перпендикулярность на чертеже одной пары одноименных следов свидетельствует о перпендикулярности плоскостей.

На рис. 4.27 представлены две плоскости: плоскость общего положения α и горизонтально-проецирующая плоскость β.

Горизонтальные следы этих плоскостей перпендикулярны между собой. Так как плоскость β перпендикулярна прямой $h'_{0\alpha}$ (горизонтальному следу), лежащей в плоскости α, условие перпендикулярности двух плоскостей между собой соблюдено.

На рис. 4.28 представлены две взаимно-перпендикулярные плоскости частного положения: горизонтально-проецирующая α и горизонтальная β.

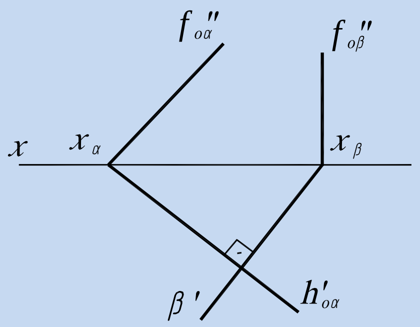


Рис. 4.27

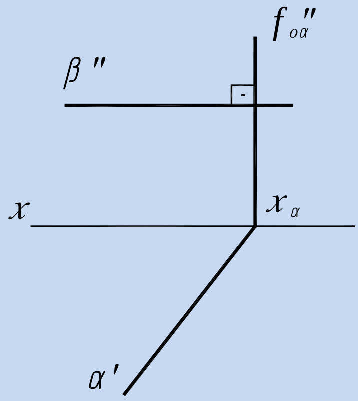


Рис. 4.28

4.9. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения двух плоскостей, заданных треугольниками *ABC* и *DEF* (рис. 4.29, *а*).

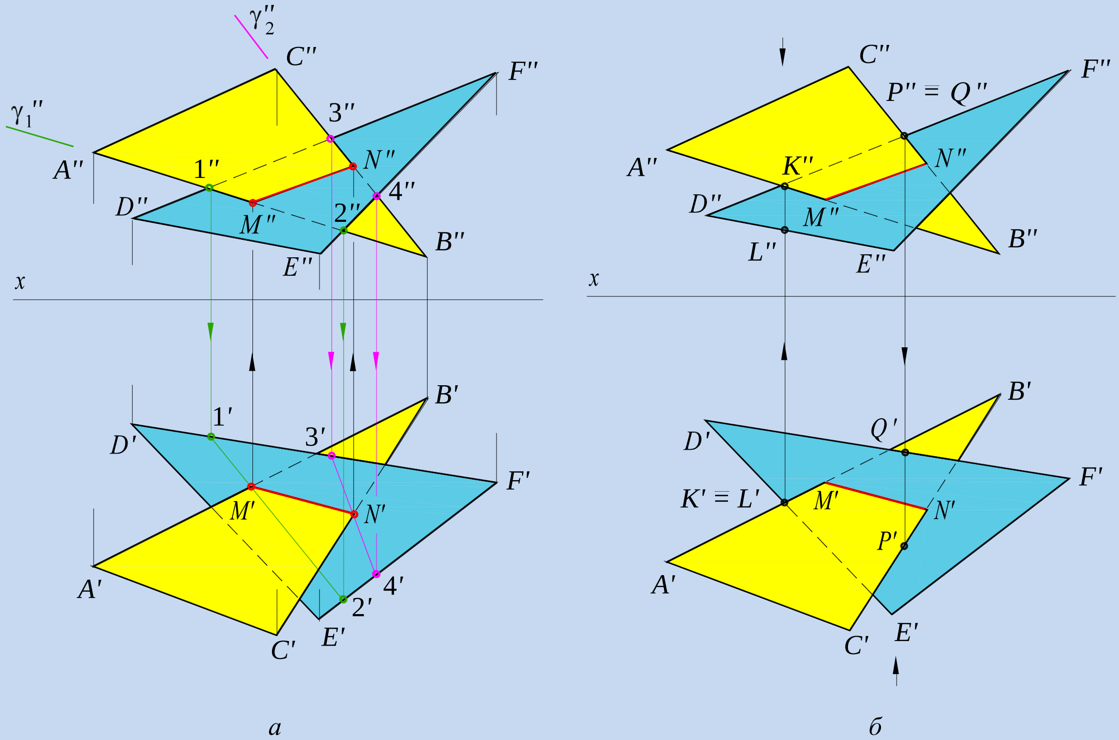


Рис.4.29

Решение. Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения используют вспомогательные плоскости (рис. 4.10). Другой способ построения линии пересечения плоскостей заключается в том, что находят точки пересечения двух прямых, принадлежащих одной из плоскостей, с другой плоскостью, т. е. решается задача на пересечение прямой линии с плоскостью общего положения.

На рис. 4.29, *а* приведено построение линии пересечения, которая проходит через точки M и N. Точка M найдена как точка пересечения прямой AB с плоскостью треугольника DEF. Для ее построения через сторону AB проведена фронтально-проецирующая плоскость γ_1 (на рисунке изображен след-проекция γ_1'', совпадающий с проекцией $A''B''$ прямой AB). Плоскость γ_1 пересекает плоскость треугольника DEF по прямой 1–2; точка M получается как точка пересечения прямых AB и 1–2. Сначала находим горизонтальную проекцию точки M', затем по линии связи строим фронтальную проекцию M''.

Точка N линии пересечения треугольников получена с помощью второй плоскости γ_2, которая проведена через прямую BC треугольника ABC и, также как γ_1, является фронтально-проецирующей. Фронтальный след-проекция γ_2'' плоскости совпадает с проекцией $B''C''$ прямой BC. Плоскость γ_2 пересекает треугольник DEF по линии 3–4. На пересечении прямых BC и 3–4 получается точка N, принадлежащая линии пересечения двух треугольников. Сначала находится горизонтальная проекция точки N', затем по линии связи определяется фронтальная проекция N''.

Для определения видимости сторон треугольников надо сравнивать положение двух точек, из которых одна принадлежит стороне треугольника ABC, вторая – стороне треугольника DEF, и у которых совпадают либо горизонтальные, либо фронтальные проекции (конкурирующие точки). В первом случае устанавливается, какая из этих точек «закрывает» другую по отношению к горизонтальной плоскости проекций, во втором – относительно фронтальной плоскости проекций.

На рис.4.29, *б* в качестве примера приведены две горизонтально-конкурирующие точки – K и L. У этих точек совпадают горизонтальные проекции ($K' = L'$). Но точка K принадлежит стороне AB треугольника ABC и расположена выше, чем точка L, принадлежащая стороне DE треугольника DEF. Следовательно, для наблюдателя, смотрящего на плоскость π_1 сверху, точка K «закрывает» точку L, а это значит, что данная часть треугольника ABC, которой принадлежит точка K, закрывает треугольник DEF. Поэтому часть горизонтальной проекции $D'E'$ стороны, закрытой треугольником ABC, показывается штриховой линией.

Для определения видимости фронтальных проекций треугольников рассмотрим относительное положение двух фронтально-конкурирующих точек P и Q (рис. 4.29, *б*), у которых фронтальные проекции совпадают ($P'' = Q''$). Точка P, расположенная на стороне BC треугольника ABC, находится ближе к глазу наблюдателя, смотрящего на плоскость π_2, чем точка Q, расположенная на стороне DF треугольника DEF. Это значит, что часть треугольника ABC, которой принадлежит точка P, закрывает треугольник DEF. Поэтому часть фронтальной проекции стороны DF, закрытой треугольником ABC, показывается штриховой линией.

Задача 2. Построить проекции прямой призмы высотой 50 мм, основанием которой является треугольник ABC (рис. 4.30).

Решение. Поскольку призма прямая, то боковые ребра перпендикулярны плоскости основания ABC. Поэтому для того, чтобы определить положение боковых ребер призмы, следует из какой-либо вершины основания ABC провести перпендикуляр к плоскости основания. Для построения проекций перпендикуляра в плоскости ABC проведены горизонталь $B1$ и фронталь $B2$. Через вершину A основания проведены проекции перпендикуляра n ($n' \perp B'1'$, $n'' \perp B''2''$).

Для построения проекций ребра, натуральная величина которого 50 мм, использовано правило прямоугольного треугольника. Вначале на перпендикуляре n выбирается произвольная точка $E(E', E'')$ и определяется натуральная величина $A'E^*$ отрезка AE. Затем на натуральной величине $A'E^*$ откладывается длина 50 мм и находится положение точки A_1', которое ограничивает длину горизонтальной проекции бокового ребра. Фронтальная проекция A_1'' точки A_1 определяется при помощи линии связи.

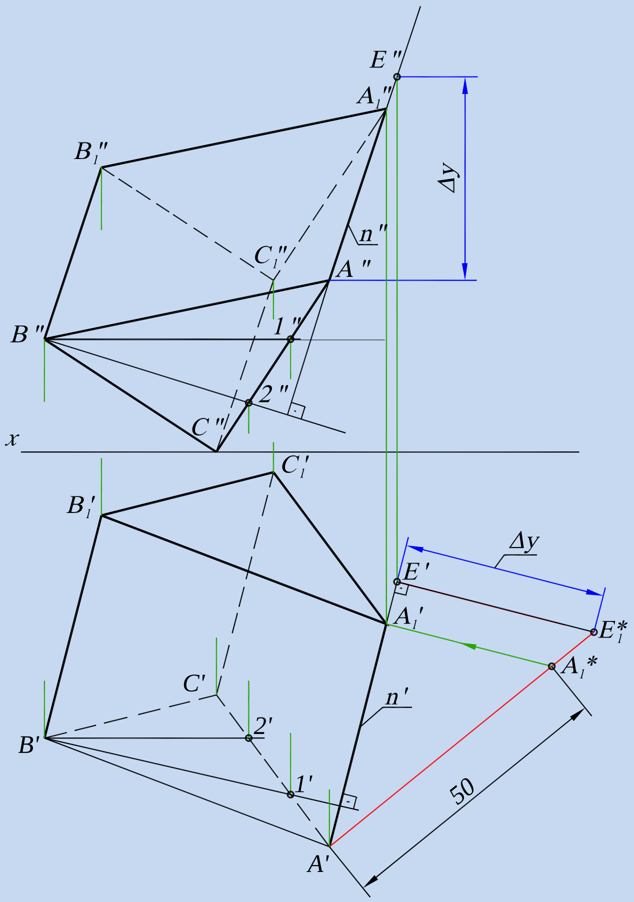


Рис. 4.30

Далее построение проекций призмы сводится к проведению прямых, параллельных проекциям бокового ребра и сторонам основания. Видимость проекций призмы выявляется из расположения оснований призмы по отношению к наблюдателю. На горизонтальной проекции основание $A_1B_1C_1$ будет видимым, так как его фронтальная проекция расположена выше проекции основания ABC. На фронтальной проекции видимым является основание ABC, потому что его горизонтальная проекция расположена ближе к наблюдателю, чем основание $A_1B_1C_1$.

4.10. Вопросы для контроля

1. Каков признак параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей?
2. Как проверить на чертеже параллельность прямой и плоскости?
3. Как располагаются на чертеже одноименные следы параллельных между собой плоскостей?
4. Как строится точка пересечения прямой линии с плоскостью частного положения?
5. Как строится линия пересечения двух плоскостей, из которых хотя бы одна является плоскостью частного положения?
6. В чем заключается общий способ построения линии пересечения двух плоскостей?
7. В какой последовательности выполняются действия для построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения?
8. Каков признак перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей?
9. Как располагаются проекции перпендикуляра к плоскости?
10. Как через точку провести перпендикуляр к прямой общего положения?
11. Как располагаются между собой одноименные следы двух взаимно перпендикулярных плоскостей?